



# O Dilema de Abraham-Minkowski

---

*Aluna: Camila Beli Silva*

*Disciplina: Eletromagnetismo A*

*Docente: Prof. Dr. Philippe W. Courteille*



# Sumário

1. Introdução
  - 1.1. História
  - 1.2. Teoria
  - 1.3. O Dilema
2. Discussões e Experimentos
3. Conclusão
4. Referências

## 1.1. História

### Hermann Minkowski (1864 - 1909)

- Nasceu em Aleksotas na Rússia, atualmente Lituânia;
- Estudou na Universidade de Berlim, onde obteve seu doutorado em 1885;
- Trabalhou nas universidades de Bonn, Göttingen, Königsberg e Zurich;
- Sua principal área de pesquisa foi em geometria dos números.



### Max Abraham (1864 - 1922)

- Nasceu Gdansk, até então pertencente à Alemanha;
- Estudou na Universidade de Berlim;
- Trabalhou nas Universidades de Göttingen, de Illinois, de Milão e em Technische Hochschule;
- Quase toda sua pesquisa estava relacionada à Teoria de Maxwell;



## 1.2. Introdução

### Equações de Maxwell no vácuo

$$i) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$iii) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$iv) \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Densidade de Energia:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

### Equações de Maxwell macroscópicas

$$i) \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$$

$$ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$iii) \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_l$$

$$iv) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Densidade de Energia:

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

## 1.2. Introdução

### Equações de Maxwell no vácuo

$$i) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$iii) \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$iv) \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Densidade de Energia:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

### Equações de Maxwell macroscópicas

$$i) \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l$$

$$ii) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$iii) \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_l$$

$$iv) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

Vetor de Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Densidade de Energia:

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

## 1.3. O Dilema

- Densidade de momento no vácuo:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}$$

- Em meio dielétricos:

- Momento de Minkowski:

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

- Momento de Abraham:

$$\mathbf{p}_A = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

## 1.3. O Dilema

- Densidade de momento no vácuo:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \quad \checkmark$$

- Em meio dielétricos:

- Momento de Minkowski:

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

- Momento de Abraham:

$$\mathbf{p}_A = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

## 1.3. O Dilema

Considerando um fóton que está no vácuo e então entra em um meio dielétrico de índice de refração  $n > 1$

### Minkowski

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \lambda = \frac{c}{n\nu}$$

$$p_M = \frac{n\hbar\omega}{c}$$

### Abraham

$$c \rightarrow \frac{c}{n} \quad p = mv \quad E = mc^2$$

$$p_A = \frac{\hbar\omega}{nc}$$



## 1.3. O Dilema

Considerando um fóton que está no vácuo e então entra em um meio dielétrico de índice de refração  $n > 1$

### Minkowski

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{n\nu}$$

$$p_M = \frac{n\hbar\omega}{c}$$

### Abraham

$$c \rightarrow \frac{c}{n} \quad p = mv \quad E = mc^2$$

$$p_A = \frac{\hbar\omega}{nc}$$

ONDULATÓRIO

### 1.3. O Dilema

Considerando um fóton que está no vácuo e então entra em um meio dielétrico de índice de refração  $n > 1$

#### Minkowski

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{n\nu}$$

$$p_M = \frac{n\hbar\omega}{c}$$

CORPUSCULAR

#### Abraham

$$c \rightarrow \frac{c}{n}$$

$$p = mv$$

$$E = mc^2$$

$$p_A = \frac{\hbar\omega}{nc}$$

ONDULATÓRIO

---

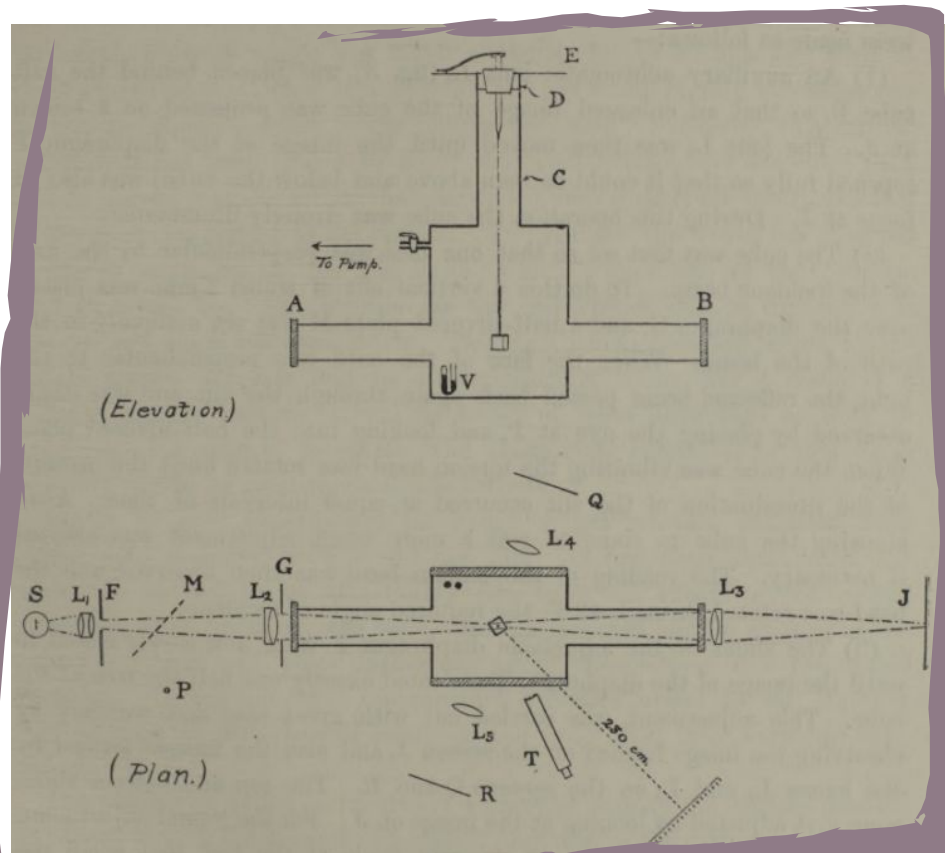
## 2.1. Discussões

---

- Em 1950, Laue e Møller independentemente obtiveram um critério deveria ser satisfeito pelas propriedades de transformação dos componentes do tensor de momento-energia para uma onda eletromagnética. De acordo com suas hipóteses, mostraram que o tensor que descrevia o momento de Minkowski satisfazia o critério, enquanto o de Abraham não.
- Em 1971, Blount introduziu o conceito de pseudomomento e identificou através da relatividade, argumentos macroscópicos de que a relação de Abraham corresponde à densidade de momento enquanto a de Minkowski relaciona-se com a densidade de pseudomomento.
- Em 1973, Skobel'tsyn apresentou demonstrou um critério alternativo no qual o tensor de Abraham era satisfeito e mostrou que o experimento realizado por Jones e Richard também poderia apoiar a teoria de Abraham.

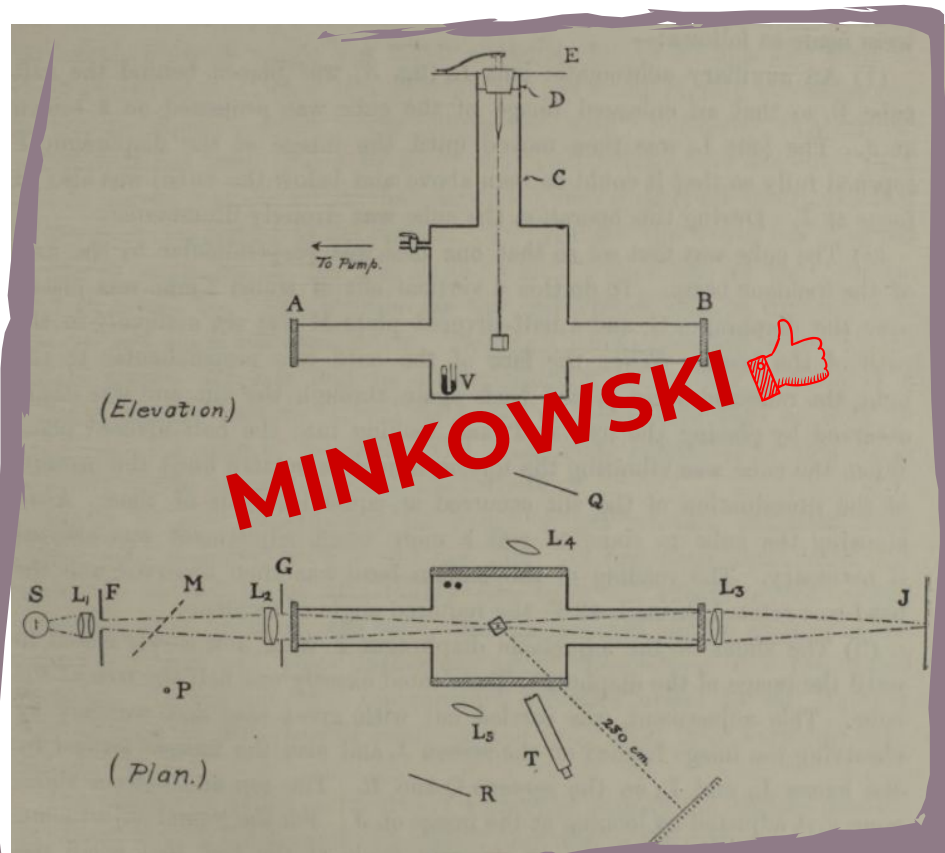
## 2.2. Experimentos

- G. Barlow, 1912: Documentado como a primeira tentativa de se medir a pressão de radiação. O experimento consistia em aplicar um feixe de que se propagava obliquamente dentro de um cubo dielétrico composto de vidro crown e medir o torque resultante.



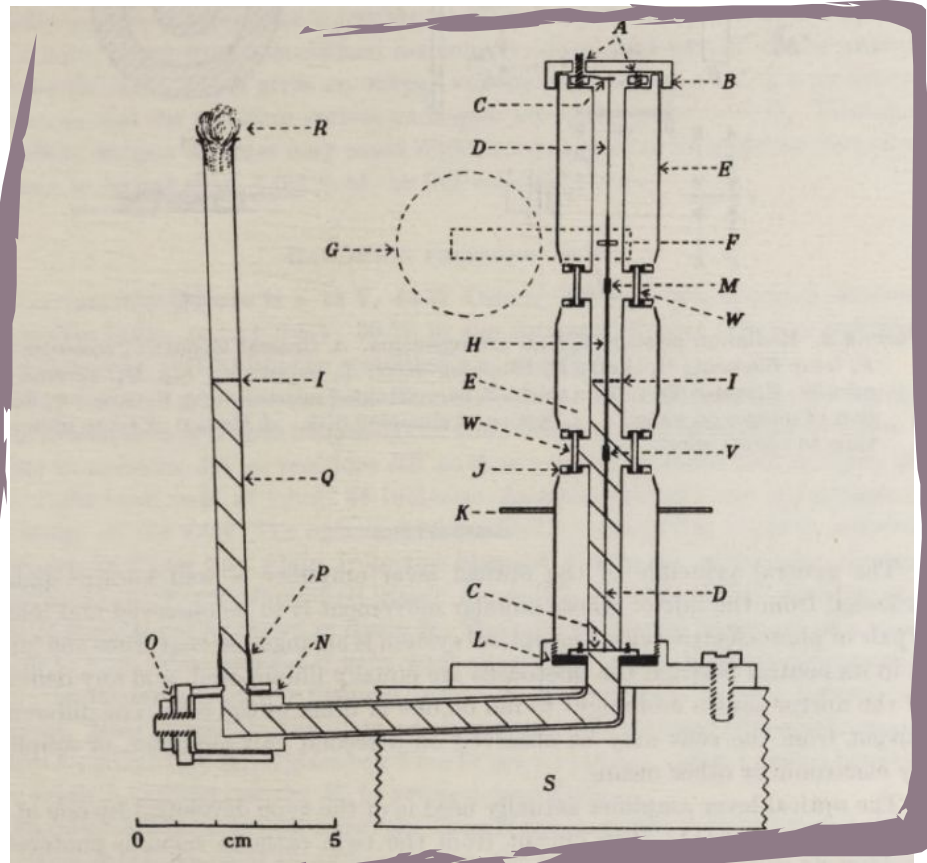
## 2.2. Experimentos

- G. Barlow, 1912: Documentado como a primeira tentativa de se medir a pressão de radiação. O experimento consistia em aplicar um feixe de que se propagava obliquamente dentro de um cubo dielétrico composto de vidro crown e medir o torque resultante.



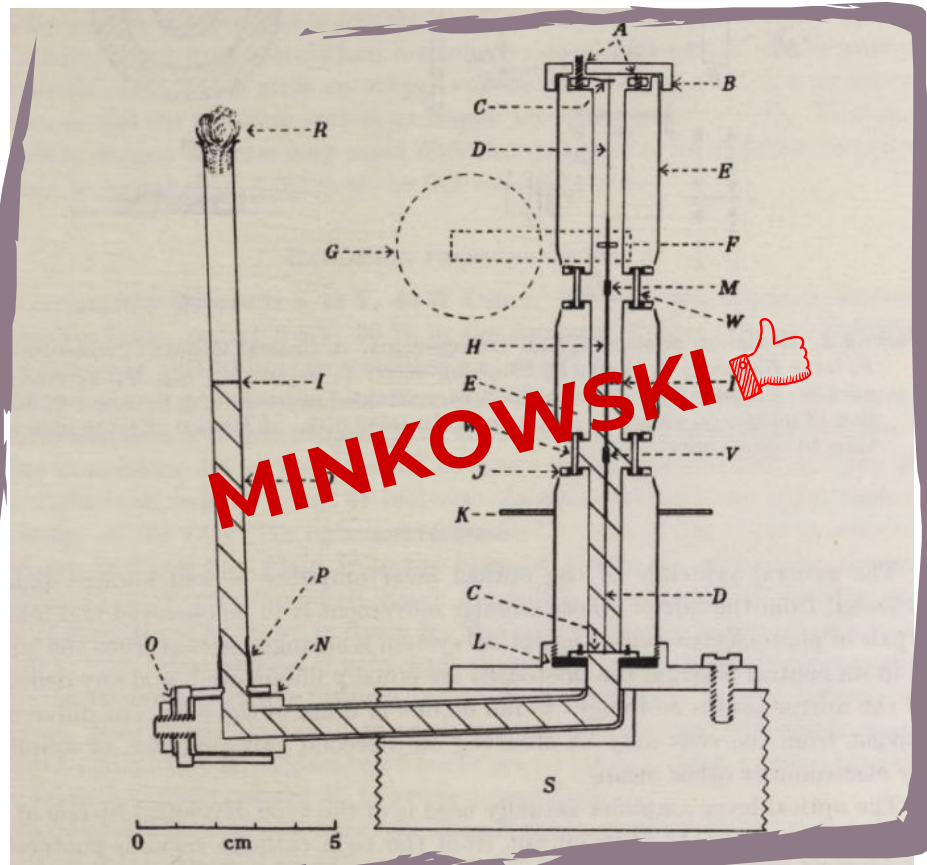
## 2.2. Experimentos

- Jones & Richards, 1953: O propósito era de investigar se a força exercida pela luz sobre um objeto opaco era proporcional ao índice de refração do meio no qual o corpo era imerso.



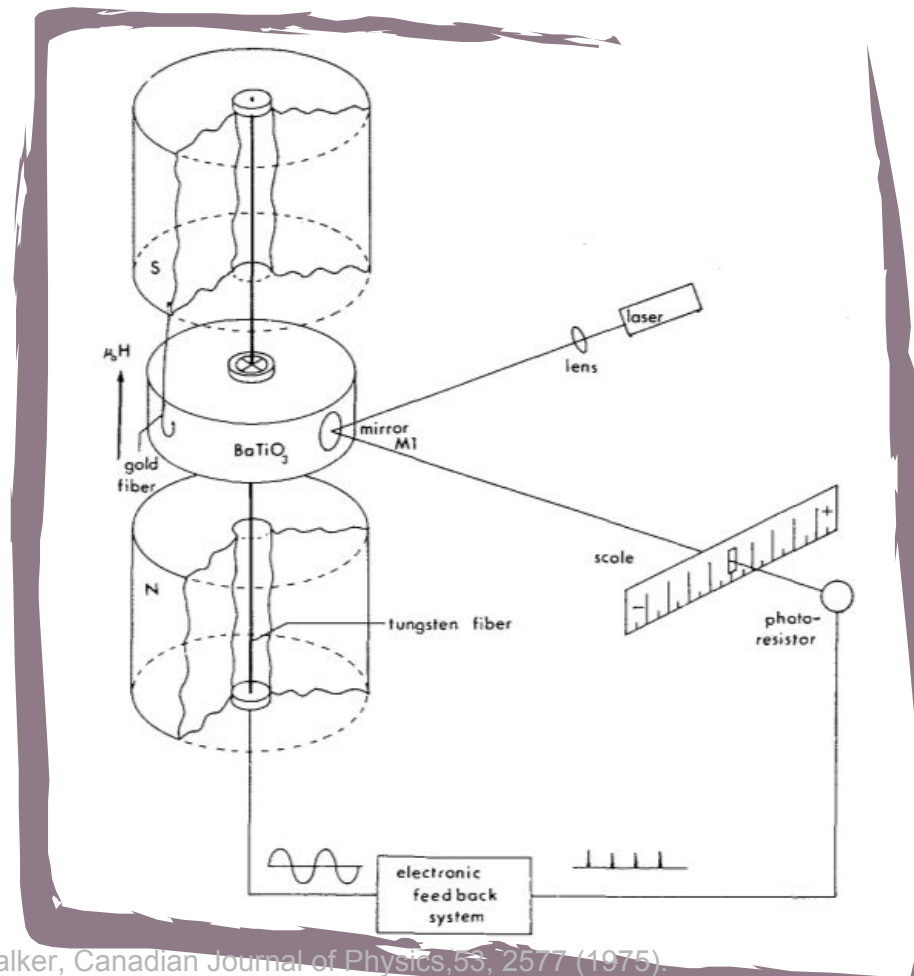
## 2.2. Experimentos

- Jones & Richards, 1953: O propósito era de investigar se a força exercida pela luz sobre um objeto opaco era proporcional ao índice de refração do meio no qual o corpo era imerso.



## 2.2. Experimentos

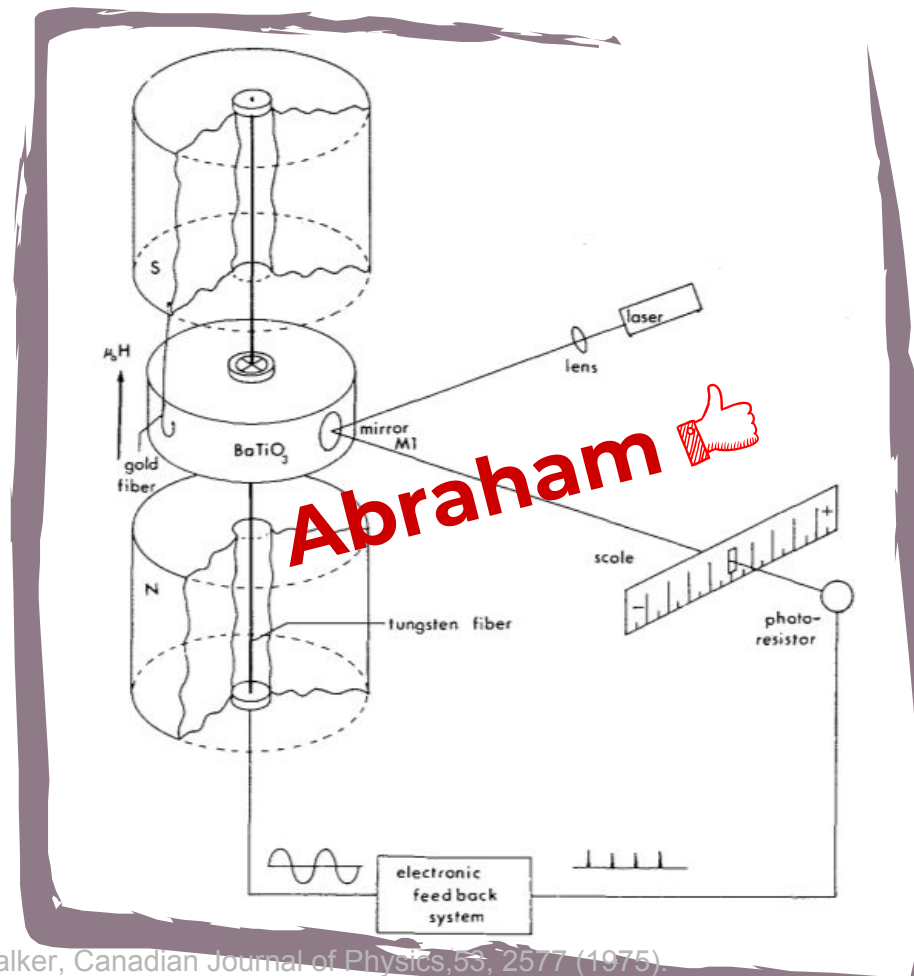
- Walker, Lahoz & Walker, 1975: O experimento consistia em suspender um disco de cerâmica de Bário-Titânio - material escolhido devido a sua alta constante dielétrica - em um pêndulo de tensão pendurado por uma fina fibra de tungstênio, sendo o disco localizado entre os polos de um forte eletroíma.





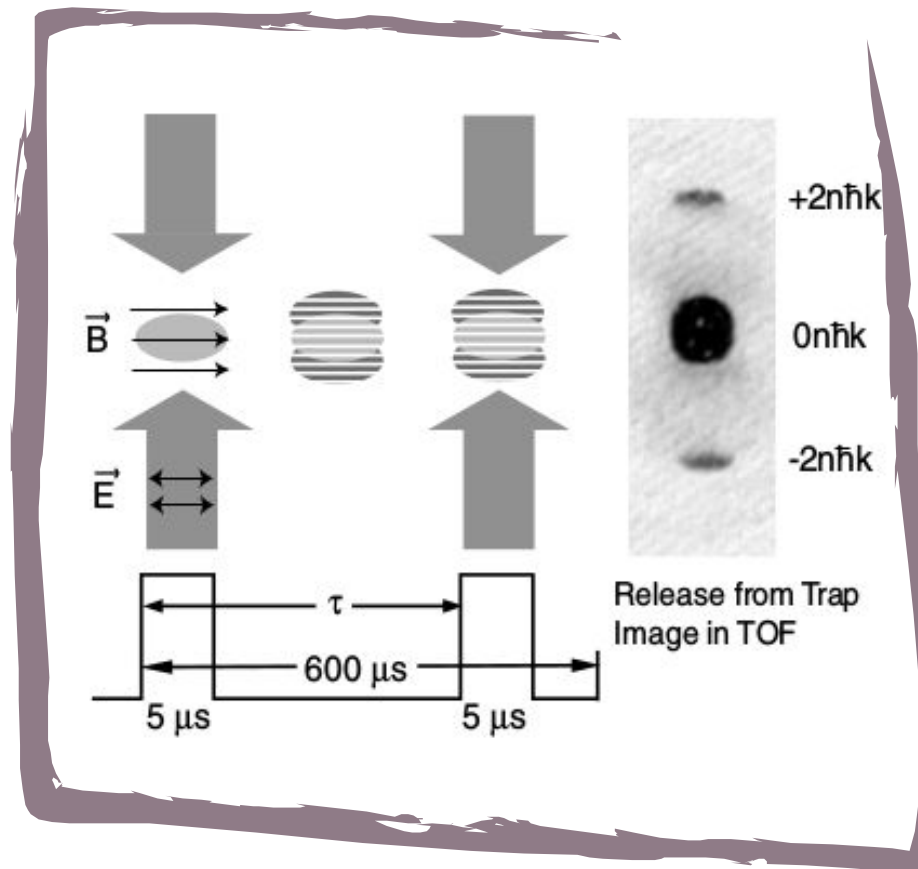
## 2.2. Experimentos

- Walker, Lahoz & Walker, 1975: O experimento consistia em suspender um disco de cerâmica de Bário-Titânio - material escolhido devido a sua alta constante dielétrica - em um pêndulo de tensão pendurado por uma fina fibra de tungstênio, sendo o disco localizado entre os polos de um forte eletroíma.



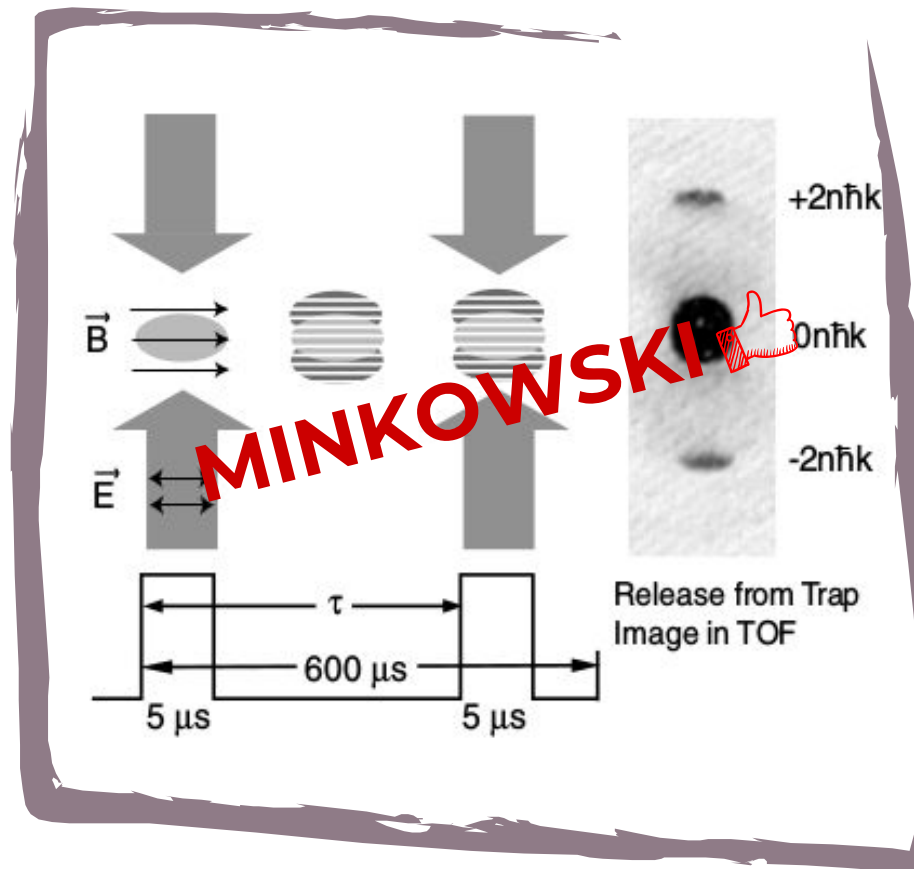
## 2.2. Experimentos

- G. K. Campbell et al, 2005: O objetivo era medir o recuo de um condensado de Bose-Einstein a medida que os fótons são refletidos de sua superfície.



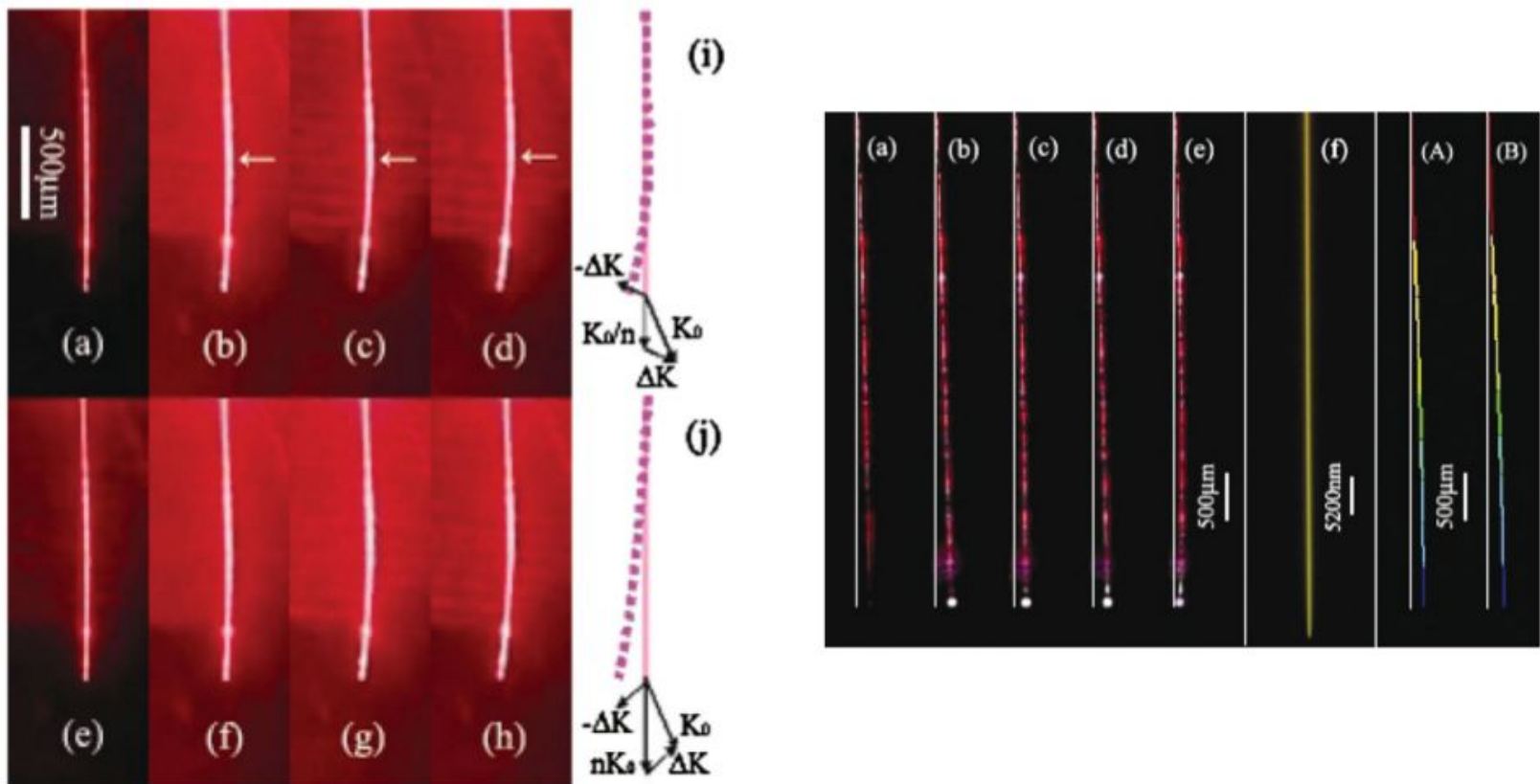
## 2.2. Experimentos

- G. K. Campbell et al, 2005: O objetivo era medir o recuo de um condensado de Bose-Einstein a medida que os fótons são refletidos de sua superfície.



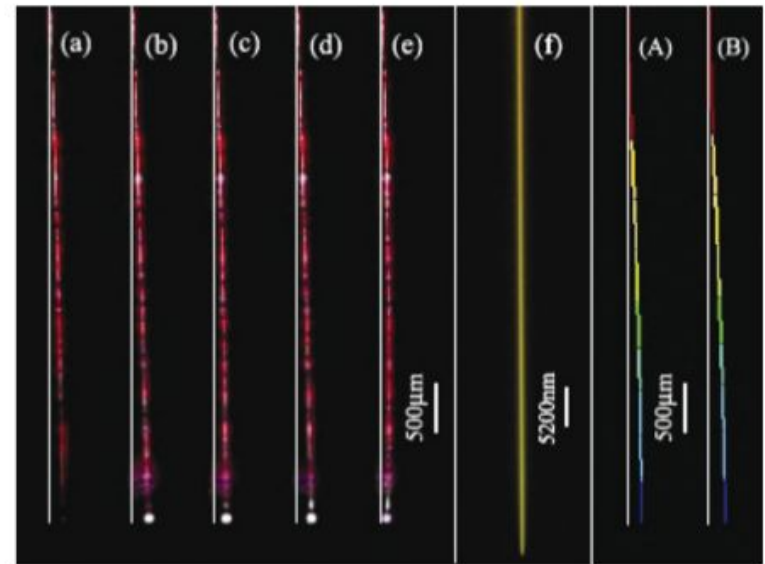
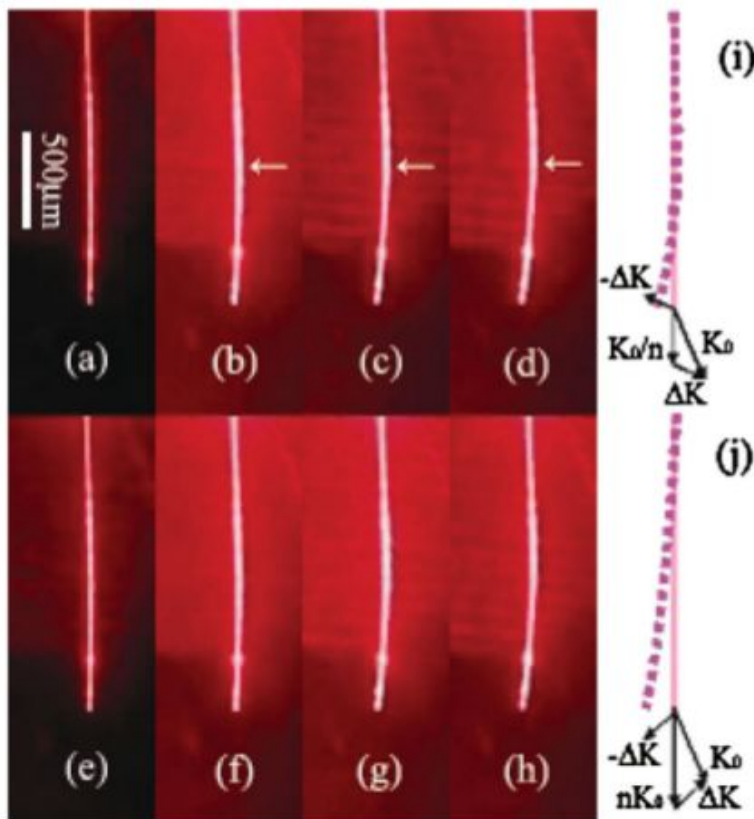
## 2.2. Experimentos

- W. She, J. Yu and & R. Feng, 2008: Observaram uma força de pressão na face final de um filamento de sílica nanométrica. Tal força foi exercida pela luz ao sair da fibra.



## 2.2. Experimentos

- W. She, J. Yu and & R. Feng, 2008: Observaram uma força de pressão na face final de um filamento de sílica nanométrica. Tal força foi exercida pela luz ao sair da fibra.



Abraham 🍷

---

### 3. Conclusão

---

- Através da relatividade alguns teóricos mostraram que as fórmulas de Abraham e Minkowski podem ser derivadas e podem ser aplicadas sob condições diferentes.
- Outros trabalhos argumentam que essas duas fórmulas correspondem a quantidades essencialmente diferentes, sendo a de Abraham correspondente ao momento do próprio fóton, e o de Minkowski, o momento do fóton somado ao do meio que o circunda.
- Há experimentos que favorecem o momento de Minkowski e outros que favorecem o de Abraham.
- Não há um consenso no meio científico a respeito do dilema, sendo um problema ainda em aberto



## 4. Referências

- P. Bowyer, The momentum of light in media: the Abraham-Minkowski controversy, Thesis, School of Physics Astronomy, Southampton (2005).
- D. J. Griffiths, Eletrodinâmica, 3rd ed.
- P. W. Courteille, Eletrodinâmica - Eletricidade, Magnetismo e Radiação (2018).
- D. V. Skobel'tsyn, Soviet Physics Uspekhi , 253 (1973)
- G. Barlow, The Royal Society LXXXVII-A (1912)
- R. Jones and J. C. S. Richards, The Royal Society , 480 (1953)
- G. K. C. et al, Physical Review Letters, 94, 170403 (2005)
- W. She, J. Yu, , and R. Feng, Physical Review Letters 101, 243601 (2008)

Imagens:

- Max Abraham: [https://en.wikisource.org/wiki/Author:Max\\_Abraham](https://en.wikisource.org/wiki/Author:Max_Abraham)
- Hermann Minkowski: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann\\_Minkowski](https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski)

---

*Obrigada*